Journal of Geometry and Physics 10 (1992) 19–35
North-Holland

JOURNAL OF
GEOMETRY AND
PHYSICS

Identités de Fierz et formes bilinéaires dans les espaces spinoriels

Louis-Samuel Randriamihamison

Université Paul Sabatier, U.F.R. Mathématiques, 118, route de Narbonne, 31 062 Toulouse Cédex, France

Reçu le 7 mai 1991
(Revisé le 29 janvier 1992)

Following several authors on a recent geometrical interpretation of the Fierz identities, we give a general and geometrical demonstration of the Fierz identities, using the spinorial formalism of Chevalley, and without any matrix formalism. The Kustaanheimo–Stiefel (KS) transformation is presented as an elarged triality principle and a particular case of the Fierz identities.

Keywords: *Clifford algebra, spinors, Fierz identities*
1991 MSC: *15 A 66*
PACS: *02.10*

1. Introduction

Les identités de Fierz [5,6,10] sont des relations entre formes bilinéaires bien connues des physiciens. Ces identités proviennent à l'origine de relations particulières vérifiées par les matrices de Pauli et de Dirac. Dans l'algèbre de Clifford C(1,3), partant de la relation de fermeture

$$\Gamma = \frac{1}{4} \sum_{A=1}^{16} \mathrm{Tr}(\gamma_A \Gamma) \cdot \gamma_A ,$$

on obtient l'identité de base

$$\delta_{ij}\delta_{kl} = \frac{1}{4} \sum_{A=1}^{16} (\gamma_A)_{il} (\gamma_A)_{kj} ,$$

où δ_{ij} est le symbole de Kronecker, et où (γ_A), $A=1, ..., 16$, est un système générateur de l'algèbre C(1,3) vérifiant $\mathrm{Tr}(\gamma_A\gamma_B) = 4\delta_{AB}$.

Ces relations conduisent alors à des identités du type

$$(\tilde{\psi}\varphi)(\tilde{\chi}\lambda) = \frac{1}{4} \sum_{A=1}^{16} (\tilde{\psi}\gamma_A \lambda)(\tilde{\chi}\gamma_A \varphi) ,$$

où $\psi, \varphi, \chi, \lambda \in \mathbb{C}^4$ sont des spineurs. Ces relations induisent des identités classiques sur des quantités physiques telles que vecteur courant, tenseur densité de moment électromagnétique, tenseur densité de spin, etc.

Ce papier fait suite à une série d'articles de Reifler et Morris [8,9], et de Keller et Rodriguez-Romo [7,12] sur une interprétation géométrique des identités de Fierz. Dans ce papier, nous proposons une démonstration générale des identités de Fierz, en dimension paire quelconque et toute signature, de manière intrinsèque, en évitant tout formalisme matriciel, mais en utilisant le formalisme de Chevalley [2] ou Crumeyrolle [4]. Nous donnons les démonstrations générales, sans calculs trop longs ou compliqués, mais en mettant en évidence l'aspect géométrique de ces relations. Ce formalisme intrinsèque permet naturellement d'étendre ces formules sur des variétés à structure spinorielle.

Dans un premier temps, nous rappelons des résultats sur le produit tensoriel de la représentation spinorielle par elle-même [2,4], qui correspond à l'application de Cartan utilisée par Reifler et Morris [9], puis d'une propriété de cette application nour tirons les identités de Fierz. Enfin, dans un exemple, nous montrons comment la transformation de Kustaanheimo–Stiefel (KS) [13–15] peut s'interpréter en terme de principe de trialité élargi et d'identité de Fierz.

2. Le produit tensoriel de la représentation spinorielle par elle-même

Nous utilisons les notations de Crumeyrolle dans la réf. [4]. On considère un espace vectoriel E sur $\mathbb{C}$, de dimension paire $n=2r$, muni d'une forme quadratique Q non-dégénérée. On note $\mathrm{C}(E, Q)=\mathrm{C}(Q)$ l'algèbre de Clifford associée à (E, Q). Si f est un r-vecteur isotrope associé à un sous-espace totalement isotrope maximal F' de E, on note $S=\mathrm{C}(Q)f$ l'espace spinoriel associé.

Si G est le groupe de Clifford, on note $\rho: \Gamma \to \mathrm{End}(S)$, la représentation spinorielle de G dans S,

$$\text{si } g \in G \text{ et } uf \in S \quad \text{alors } \rho(g) \cdot uf = guf.$$

On rappelle que pour $g \in G$, $N(g)=\beta(g)g$ est la norme spinorielle, β étant l'antiautomorphisme principal de $\mathrm{C}(Q)$.

Définition 2.1. On considère le produit tensoriel $S \otimes S$, on définit le produit tensoriel $\rho \otimes \rho$ de la représentation spinorielle,

$$\text{si } g \in C \text{ et } uf, vf \in S \quad \text{alors } (\rho \otimes \rho)(g) \cdot (uf \otimes vf) = guf \otimes gvf.$$

Proposition 2.2 (Chevalley [2]). *La représentation $\rho \otimes \rho$ de G dans $S \otimes S$ est équivalente à la représentation $w \to N(g)gwg^{-1}$ ($w \in \mathrm{C}(Q)$) de G dans $\mathrm{C}(Q)$.* □

Autrement dit, il existe un isomorphisme linéaire φ de $S \otimes S$ dans $\mathrm{C}(Q)$ tel que

$$\varphi((\rho\otimes\rho)(g)\cdot(uf\otimes vf))=N(g)g\varphi(uf\otimes vf)g^{-1}\ .$$

L'isomorphisme linéaire φ de $S\otimes S$ dans $\mathrm{C}(Q)$ est défini par

$$\varphi(uf\otimes vf)=uf\beta(v)\ .$$

Définition 2.3. On note C_h le sous-espace vectoriel de $\mathrm{C}(Q)$, engendré linéairement par les produits d'au plus h éléments de E.

En particulier $\mathrm{C}_0=\mathbb{C}$; $\mathrm{C}_1=\mathbb{C}\oplus E$; $\mathrm{C}_n=\mathrm{C}(Q)$. On considère alors l'espace quotient $\mathrm{C}_h/\mathrm{C}_{h-1}$.

Proposition 2.4. *L'espace $\mathrm{C}_h/\mathrm{C}_{h-1}$ est linéairement isomorphe au sous-espace $\wedge^h(E)$ de l'algèbre extérieure $\wedge(E)$.*

Remarques.

(1) On obtient ainsi un isomorphisme linéaire entre $\wedge(E)$ et $\mathrm{C}(Q)$ identifiée à la somme directe,

$$\mathrm{C}_0\oplus\mathrm{C}_1/\mathrm{C}_0\oplus\cdots\oplus\mathrm{C}_n/\mathrm{C}_{n-1}\ .$$

(2) On vérifie facilement que les espaces C_h sont stables par l'action d'un élément quelconque g de G; en effet, si les (x_j), $j=1, ..., h$, sont des éléments quelconques de E, on a

$$gx_1\cdots x_hg^{-1}=gx_1g^{-1}\cdots gx_hg^{-1}=y_1\cdots y_h\in\mathrm{C}_h\ .$$

On a la

Proposition 2.5. *La représentation $\rho\otimes\rho$ définit de manière naturelle une représentation $(\rho\otimes\rho)_h$ de G dans l'espace $\mathrm{C}_h/\mathrm{C}_{h-1}$.* □

2.1. LES REPRESENTATIONS θ_h DU GROUPE ORTHOGONAL $\mathrm{O}(Q)$

Soit $g\in G$, g agit sur E par $p(g)\cdot x=gxg^{-1}$ $(x\in E)$, et $p(g)$ est dans $\mathrm{O}(Q)$. Remarquons que $\forall k\in\mathbb{C}^*$ et $\forall w\in\mathrm{C}(Q)$ on a

$$(kg)w(kg)^{-1}=gwg^{-1}\ ,$$

donc gwg^{-1} ne dépend que de $p(g)$ dans $\mathrm{O}(Q)$.

Définition 2.6. On définit la représentation θ de $\mathrm{O}(Q)$ dans $\mathrm{C}(Q)$ par

$$\theta_{p(g)}\cdot w=gwg^{-1}\ ,\quad w\in\mathrm{C}(Q)\ .$$

$\theta_{p(g)}$ conserve l'espace C_h/C_{h-1} et θ induit une représentation θ_h de $O(Q)$ dans cet espace.

Proposition 2.7 [2,4]. *La représentation θ_h de $O(Q)$ dans C_h/C_{h-1} est équivalente à la représentation τ_h de $O(Q)$ dans $\wedge^h(E)$ telle que*

$$\tau_h(\sigma)\cdot(x_1 \wedge \cdots \wedge x_h) = \sigma(x_1) \wedge \cdots \wedge \sigma(x_h)$$

où $\sigma \in O(Q)$. □

Corollaire. *La représentation θ est équivalente à la somme directe des représentations $\tau_0, \tau_1, \dots, \tau_n$.* □

3. Les formes bilinéaires $\mathscr{B}_h$ à valeurs dans C_h/C_{h-1}

Nous énonçons ici une liste de résultats sans démonstrations, ces résultats classiques se trouvant dans les réfs. [2] ou [4].

Définition 3.1. On pose pour tout uf et vf de S

$$uf\beta(v) = \sum_{h=0}^{n} \mathscr{B}_h(uf, vf) ,$$

où $\mathscr{B}_h(uf, vf)$ est la composante homogène de degré h dans $\wedge(E)$ avec l'identification linéaire de $\wedge^h(E)$ et C_h/C_{h-1}.

Proposition 3.2. *$\mathscr{B}_h$ est une application bilinéaire de $S \times S$ dans $\wedge^h(E)$ qui vérifie*

$$\forall g \in G \quad \mathscr{B}_h(guf, gvf) = N(g)\tau_h(p(g))\cdot\mathscr{B}_h(uf, vf) .$$ □

Proposition 3.3.

(1) *$\mathscr{B}_h(vf, uf) = \epsilon\epsilon_h\mathscr{B}_h(uf, vf)$ avec $\epsilon = (-1)^{r(r-1)/2}$ et $\epsilon_h = (-1)^{h(h-1)/2}$.*

(2) *Si $h \equiv r \pmod 2$ alors $\mathscr{B}_h$ est nulle sur $S^+ \times S^-$ et $S^- \times S^+$.*

(3) *Si $h \equiv r+1 \pmod 2$ alors $\mathscr{B}_h$ est nulle sur $S^+ \times S^+$ et $S^- \times S^-$.*

Ici $S^+ = C^+(Q)f$ et $S^- = C^-(Q)f$. □

Semi-spineurs. On considère $S^+ = C^+(Q)f$ et $S^- = C^-(Q)f$. Les éléments u^+f ou u^-f de S^+ ou S^- sont appelés semi-spineurs respectivement pair ou impair.

Proposition 3.4. *Soient uf un spineur et vf un semi-spineur. On a*

$$\mathscr{B}_{n-h}(uf, vf) = (-1)^r\epsilon(v)\mathscr{B}_h(uf, vf)e_N ,$$

où $\epsilon(v)=1$ si vf est pair, $\epsilon(v)=-1$ si vf est impair, et $e_N=e_1\cdots e_n$, $(e_1,\ldots,e_n)$ étant une base "pseudo-orthonormée" de E. □

4. Identités de Fierz en signature (p, q) quelconque

L'étude précédente a été effectuée en signature neutre, puisque le corps de base était $\mathbb{C}$. Nous passons maintenant au cas plus général d'une signature (p, q) quelconque sur le corps $\mathbb{R}$.

On considère maintenant un espace vectoriel E sur $\mathbb{R}$, de dimension paire $n=2r$, muni d'une forme quadratique non-dégénérée Q, de signature (p, q) quelconque avec $p+q=n$. En complexifiant, on obtient l'espace E' muni de la forme quadratique Q' et l'algèbre de Clifford associée $\mathrm{C}(Q')=\mathrm{C}(E', Q')$.

On désignera par $\{x_i, y_j\}$, $1\le i, j\le r$, une base de Witt spéciale associée à une base pseudo-orthonormée réelle (e_i), $1\le i\le n$, de E. Soit $S'=\mathrm{C}(Q')f$ l'espace spinoriel complexe associé au r-vecteur isotrope $f=y_1\cdots y_r$. Nour rappelons les notations suivantes.

Soit la décomposition de Witt $E'=F\oplus F'$, où $\{x_i, 1\le i\le r\}$ est une base de F et $\{y_j, 1\le j\le r\}$ de F'. On a

$$\dim F'\cap\overline{F'}=h=r-k\ ,\quad k=\tfrac{1}{2}|p-q| \text{ ou } h=\inf(p,q)\ .$$

$\overline{F'}$ désigne le conjugué complexe du sous-espace totalement isotrope maximal F'.

Il est loisible de poser $\bar{x}_i=x_i$ et $\bar{y}_i=y_i$ pour $1\le i\le h$ et $\bar{x}_j=\delta y_j$ pour $h+1\le j\le r$ avec $\delta=|p-q|/(p-q)$. Pour $1\le i,j\le r$, $i\ne j$, on a

$$x_iy_i+y_ix_i=1\ ,$$
$$x_iy_j+y_jx_i=0\ ,$$
$$x_ix_j+x_jx_i=0\ ,$$
$$y_iy_j+y_jy_i=0\ .$$

4.1. ETUDE DE $\mathscr{B}_n$

Proposition 4.1. *Dans $S'=\mathrm{C}(Q')f$, on considère $uf\beta(v)=\sum_h\mathscr{B}_h(uf, vf)$. Pour $h=n$, on a:*

(i) $\mathscr{B}_n(guf, gvf)=N(g)g\mathscr{B}_n(uf, vf)g^{-1}$.

(ii) $\mathscr{B}_n$ est invariante par l'action du groupe de Clifford spécial réduit $G_0'^{+}$ ($g\in G_0'^{+}$ ssi $g\in G'^{+}$ et $N(g)=1$) .

(iii) Pour tout x de E, on a: $\mathscr{B}_n(xuf, vf)=-\mathscr{B}_n(uf, xvf)$.

Démonstration.

(i) Provient de la proposition 3.2.

(ii) Provient de (i) et du fait que $ge_Ng^{-1}=e_Ngg^{-1}=e_N$ si $g\in \mathrm{C}^+(Q')$.

(iii) Soit $(e_1, ..., e_n)$ une base pseudo-orthonormée de E, on a d'une part

$$e_k uf\beta(v)=e_k \sum_h \mathscr{B}_h(uf, vf) ,$$

et d'autre part

$$uf\beta(e_k v)=\left(\sum_h \mathscr{B}_h(uf, vf)\right)e_k ,$$

donc

$$\mathscr{B}_n(e_k uf, vf)=e_k e_1\cdots\hat{e}_k\cdots e_n ,$$

$$\mathscr{B}_n(uf, e_k vf)=e_1\cdots\hat{e}_k\cdots e_n e_k ,$$

or e_k anticommute avec tous les $e_j, j\neq k$, d'où

$$e_k e_1\cdots\hat{e}_k\cdots e_n=(-1)^{k-1}e_N ,$$

$$e_1\cdots\hat{e}_k\cdots e_n e_k=(-1)^{n-k}e_N ,$$

d'où

$$\mathscr{B}_n(e_k uf, vf)=-\mathscr{B}_n(uf, e_k vf) . \qquad \square$$

Nour rappelons qu'il est possible de définir des formes bilinéaires non-dégénérées sur S', invariantes par l'action de $G_0'^+$, en posant

$$\mathscr{B}(uf, vf)f=\beta(uf)vf ,$$

ou bien

$$\tilde{\mathscr{B}}(uf, vf)f=\tilde{\beta}(uf)vf ,$$

où $\tilde{\beta}$ est l'anti-automorphisme défini par $\tilde{\beta}=\beta\circ\alpha$ et α désigne (selon les notations de Crumeyrolle) l'automorphisme de $\mathrm{C}(Q)$ égal à $-\mathrm{id}$ sur E.

Proposition 4.2. *On peut exprimer $\mathscr{B}_n$ à l'aide de la forme bilinéaire non-dégénérée $\tilde{\mathscr{B}}$. On a*

$$\mathscr{B}_n(uf, vf)=(-\tfrac{1}{2})^r(\mathrm{i})^k\tilde{\mathscr{B}}(uf, vf)e_N , \quad k=\tfrac{1}{2}|p-q| .$$

Démonstration. On considère la forme bilinéaire $\gamma(uf, vf)$ sur S' définie par

$$\mathscr{B}_n(uf, vf)=\gamma(uf, vf)e_N .$$

γ est invariante par $G_0'^+$ et vérifie, pour tout x de E,

$$\gamma(xuf, vf) = -\gamma(uf, xvf)\ .$$

Selon un résultat classique [4,11], on en déduit que

$$\gamma(uf, vf) = \lambda\tilde{\mathscr{B}}(uf, vf)\ ,\quad \lambda\in\mathbb{C}^*\ .$$

Pour déterminer le coefficient λ, il suffit de faire le calcul dans le cas particulier où $u=1$ et $v=x_1\cdots x_r$, $\{x_i, y_j\}$ étant la base de Witt spéciale associée à $(e_1, ..., e_n)$.

Considérons, par exemple, $p>q$; on a

$$x_1 = \tfrac{1}{2}(e_1+e_n), ..., x_h = x_q = \tfrac{1}{2}(e_q+e_{n-q+1})\ ,$$
$$x_{h+1} = \tfrac{1}{2}(e_{q+1}+\mathrm{i}e_{n-q}), ..., x_r = \tfrac{1}{2}(e_r+\mathrm{i}e_{r+1})\ ,$$
$$y_1 = \tfrac{1}{2}(e_1-e_n), ..., y_h = \tfrac{1}{2}(e_q-e_{n-q+1})\ ,$$
$$y_{h+1} = \tfrac{1}{2}(e_{q+1}-\mathrm{i}e_{n-q}), ..., y_r = \tfrac{1}{2}(e_r-\mathrm{i}e_{r+1})\ .$$

On calcule d'une part

$$\begin{aligned} uf\beta(v) &= fx_r\cdots x_1 = (\tfrac{1}{2})^n(e_1-e_n)\cdots(e_r-\mathrm{i}e_{r+1})(e_r+\mathrm{i}e_{r+1})\cdots(e_1+e_n) \\ &= (\tfrac{1}{2})^n(2+2e_1e_n)\cdots(2+2\mathrm{i}e_{h+1}e_{n-h})\cdots(2+2\mathrm{i}e_re_{r+1}) \\ &= (\tfrac{1}{2})^r(\mathrm{i})^{r-h}e_1\cdots e_n \mod \mathrm{C}_{n-1}\ , \end{aligned}$$

et d'autre part

$$\tilde{\mathscr{B}}(f, x_1\cdots x_rf) = (-1)^ry_r\cdots y_1x_1\cdots x_rf = (-1)^rf,$$

d'où

$$\lambda = (-\tfrac{1}{2})^r(\mathrm{i})^{r-h} = (-\tfrac{1}{2})^r(\mathrm{i})^k\ . \qquad \square$$

4.2. EXPRESSION DE $uf\beta(v)$

On note avec un léger abus $H=(i_1, ..., i_h)$ et $e_H=e_{i_1}\cdots e_{i_h}$. On pose alors

$$\begin{aligned} \mathscr{B}_h(uf, vf) &= \sum_{1\le i_1<\cdots<i_h\le n} b_{i_1\cdots i_h}(uf, vf)e_{i_1}\cdots e_{i_h} \\ &= \sum_H b_H(uf, vf)e_H\ . \end{aligned}$$

Nous allons déterminer le coefficient $b_H(uf, vf)$.

Proposition 4.3. *On peut exprimer les coefficients b_H à l'aide de $\mathscr{B}$,*

$$b_H(uf, vf) = (\tfrac{1}{2})^r(-1)^s\mathscr{B}(uf, e_Hvf)\ ,$$

où s est le nombre de signes $(-)$ dans $\{e_{i_1}^2, ..., e_{i_h}^2\}$.

Démonstration.

(a) Calcul de b_0. On a

$$uf\beta(v)e_N = (-1)^r uf\beta(e_N v) ,$$

d'où

$$\mathscr{B}_0(uf, vf)e_N = (-1)^r \mathscr{B}_n(uf, e_N vf) ,$$
$$b_0(uf, vf) = (\tfrac{1}{2})^r (\mathrm{i})^k \tilde{\mathscr{B}}(uf, e_N vf) .$$

On rapelle que $e_N v = \alpha(v)e_N$, $e_N f = (\mathrm{i})^k f$, et aussi

$$\tilde{\mathscr{B}}(uf, \alpha(v)f) = \mathscr{B}(uf, vf) ,$$

d'où le résultat

$$b_0 = (\tfrac{1}{2})^r \mathscr{B}(uf, vf) .$$

(b) Calcul de b_H. On pose

$$(e_H)^2 = \epsilon_H \quad \text{avec } \epsilon_H = (-1)^s \epsilon_h , \quad \epsilon_h = (-1)^{h(h-1)/2} .$$

On a

$$uf\beta(v)e_H = \epsilon_h uf\beta(e_H vf) ,$$

d'où

$$b_H(uf, vf)e_H^2 = \epsilon_h b_0(uf, e_H vf) ,$$

d'où le résultat

$$b_H(uv, vf) = (-1)^s (\tfrac{1}{2})^r \mathscr{B}(uf, e_H vf) . \qquad \square$$

Théorème 4.4. *On obtient donc*

$$uf\beta(v) = \sum_H \xi_H \mathscr{B}(uf, e_H vf)e_H ,$$

avec $\xi_H = (\tfrac{1}{2})^r (-1)^s$.

Remarque. Ces résultats sont valables en signature neutre; on aurait dans ce cas $p=q$ donc $k=0$ et $(\mathrm{i})^k = 1$, ce qui fait disparaître le coefficient provenant de la complexification.

4.3. LES IDENTITES DE FIERZ RELATIVES A $\mathscr{B}$

Théorème 4.5 (Identité Fondamentale).

$$\left(\sum_h \mathscr{B}_h(uf, vf)\right)\left(\sum_k \mathscr{B}_k(u'f, v'f)\right) = \mathscr{B}(u'f, vf)\left(\sum_l \mathscr{B}_l(uf, v'f)\right) .$$

Démonstration. On a

$$f\beta(v)u'f=\epsilon\beta(vf)u'f=\epsilon\mathscr{B}(vf,u'f)f=\mathscr{B}(u'f,vf)f,$$

d'où

$$uf\beta(v)u'f\beta(v')=\mathscr{B}(u'f,vf)uf\beta(v'),$$

d'où le résultat. □

On obtient alors l'identité de Fierz générale:

Proposition 4.6.

$$\Big(\sum_H \xi_H\mathscr{B}(uf,e_Hvf)e_H\Big)\Big(\sum_K \xi_K\mathscr{B}(u'f,e_Kv'f)e_K\Big)$$

$$=\mathscr{B}(u'f,vf)\Big(\sum_L \xi_L\mathscr{B}(uf,e_Lv'f)e_L\Big),$$

où la somme sur les indices H, K et L désigne la somme sur tous les éléments de la base cliffordienne

$$\{e_0=1,e_1,\ldots,e_n,\ldots,e_{i_1}\cdots e_{i_h},\ldots,e_N\}. \qquad \square$$

En développant et en identifiant les coefficients correspondants des deux membres, on peut obtenir toutes les identités de Fierz classiques. Cherchons par exemple le terme scalaire des deux membres de l'égalité. En remarquant que $e_He^H=\epsilon_H=(-1)^{h(h-1)/2}$, on obtient

$$\sum_H \epsilon_h\mathscr{B}(uf,e_Hvf)\mathscr{B}(u'f,e_Hv'f)=2^r\mathscr{B}(u'f,vf)\mathscr{B}(uf,v'f).$$

5. Identités de Fierz relatives à la forme bilinéaire $\tilde{\mathscr{B}}$

Toute l'étude précédente reste valable en prenant pour antiautomorphisme $\tilde\beta=\beta\circ\alpha$ et en considérant l'application $uf\otimes vf\mapsto uf\tilde\beta(v)$. Un moyen rapide de retrouver tous les résultats consiste à remplacer dans les calculs précédents v par $\alpha(v)$. Nous allons énoncer succinctement les principaux résultats.

Proposition 5.1. *L'application linéaire $\tilde\varphi$ de $S'\otimes S'$ dans* $\mathrm{C}(Q')$,

$$\tilde\varphi: uf\otimes vf\mapsto uf\tilde\beta(v),$$

est un isomorphisme linéaire et la représentation $\rho\otimes\rho$ de G' dans $S'\otimes S'$ est équivalente à la représentation $w\mapsto\tilde{N}(g)gwg^{-1}$ de G' dans $\mathrm{C}(Q')$, où $\tilde{N}(g)=\tilde{\beta}(g)g$.

On pose $uf\tilde{\beta}(v)=\sum_h \tilde{\mathscr{B}}_h(uf, vf)$ où $\tilde{\mathscr{B}}_h(uf, vf)$ est la composante homogène dans $\mathrm{C}'_h/\mathrm{C}'_{h-1}$.

Proposition 5.2.
(*i*)
$$\tilde{\mathscr{B}}_h(vf, uf)=\tilde{\epsilon}\tilde{\epsilon}_h\tilde{\mathscr{B}}_h(uf, vf)\ ,$$
où
$$\tilde{\epsilon}=(-1)^{r(r+1)/2},\qquad \tilde{\epsilon}_h=(-1)^{h(h+1)/2}\,.$$
(*ii*) *Pour tout g de G′ on a*
$$\tilde{\mathscr{B}}_h(guf, gvf)=\tilde{N}(g)\tau_h(p(g))\cdot\tilde{\mathscr{B}}_h(uf, vf)\ .$$
(*iii*)
$$uf\tilde{\beta}(v)=\sum_H \xi_H\tilde{\mathscr{B}}_h(uf, e_H vf)e_H$$
avec
$$\xi_H=(\tfrac{1}{2})^r(-1)^{h+s}\,,$$
où $H=(i_1\cdots i_h)$ et s est le nombre de signes $(-)$ dans $\{e_{i_1}^2, ..., e_{i_h}^2\}$.

En “montant” les indices à l’aide de la métrique, on peut écrire
$$uf\tilde{\beta}(v)=\sum_H(\tfrac{1}{2})^r(-1)^h\tilde{\mathscr{B}}(uf, e^H vf)e_H\,.$$
Les identités de Fierz proviennent alors du

Théorème 5.3. *On a*
$$uf\tilde{\beta}(v)u'f\tilde{\beta}(v')=\tilde{\mathscr{B}}(u'f, vf)uf\tilde{\beta}(v')\ ,$$
d’où
$$\Big(\sum_h \tilde{\mathscr{B}}_h(uf, vf)\Big)\Big(\sum_k \tilde{\mathscr{B}}_k(u'f, v'f)\Big)$$
$$=\tilde{\mathscr{B}}(u'f, vf)\Big(\sum_l \tilde{\mathscr{B}}_l(uf, v'f)\Big)\,.$$

6. Les identités de Fierz utilisant des formes sesquilinéaires

Nous rappelons d’abord quelques résultats de base.
On sait définir sur S' une conjugaison dite “de charge”, $\mathscr{C}: uf\mapsto\mathscr{C}(uf)=\bar{u}\gamma f$, où

$\bar{u}$ désigne la conjugaison complexe, et où γ est un élément du groupe de Clifford complexe réduit G_0' (i.e. $N(\gamma)=1$) tel que $\bar{f}=\gamma f\gamma^{-1}$.

On a: $\bar{\gamma}\gamma f=\epsilon' f$ et $\mathscr{C}^2=\epsilon'$ id avec $\epsilon'=(-1)^{(p-r)(p-r-1)/2}$.

On définit les applications sesquilinéaires $\mathscr{H}$ et $\tilde{\mathscr{H}}$ de $S'\times S'$ par

$$\mathscr{H}(uf, vf)=\mathscr{B}(\mathscr{C}(uf), vf),$$
$$\tilde{\mathscr{H}}(uf, vf)=\tilde{\mathscr{B}}(\mathscr{C}(uf), vf).$$

Remarque. $\mathscr{H}$ et $\tilde{\mathscr{H}}$ ne sont pas nécessairement hermitiennes.

D'autre part, on sait définir deux formes sesquilinéaires hermitiennes $\mathscr{H}_0$ et $\tilde{\mathscr{H}}_0$ sur $S'\times S'$ en posant

$$e^{i\theta}\mathscr{H}_0(uf, vf)\gamma f=\beta(\overline{uf})vf,$$
$$e^{i\theta'}\tilde{\mathscr{H}}_0(uf, vf)\gamma f=\tilde{\beta}(\overline{uf})vf,$$

$e^{i\theta}$ and $e^{i\theta'}$ étant des coefficients choisis convenablement.

Proposition 6.1. *On a les relations suivantes*:

$$\mathscr{H}(uf, vf)=e^{i\theta}\mathscr{H}_0(uf, vf),$$
$$\tilde{\mathscr{H}}(uf, vf)=(-1)^k e^{i\theta'}\tilde{\mathscr{H}}_0(uf, vf),$$

où $k=\frac{1}{2}|p-q|$.

Démonstration. On a

$$\mathscr{B}(\mathscr{C}(uf), vf)f=\beta(\bar{u}\gamma f)vf=\beta(\overline{uf}\gamma)vf=\beta(\gamma)\beta(\overline{uf})vf,$$

d'où

$$\mathscr{B}(\mathscr{C}(uf), vf)\gamma f=\beta(\overline{uf})vf=e^{i\theta}\mathscr{H}_0(uf, vf)\gamma f.$$

On fait un calcul analogue pour $\tilde{\mathscr{H}}$. □

Définition 6.2. ${}^{t}S'$ désigne l'espace S' muni de l'opération $(z, uf)\mapsto\bar{z}uf$, $z\in\mathbb{C}$.

On définit une application linéaire ϕ de $S'\otimes{}^{t}S'$ dans $\mathrm{C}(Q')$ par la suite d'applications

$$(uf, vf)\mapsto(uf, \bar{v}\gamma f)\to uf\beta(\bar{v}\gamma)=uf\gamma^{-1}\beta(\bar{v}).$$

On retrouve alors tous les résultats analogues à ceux du paragraphe précédent en remplaçant vf par $\mathscr{C}(vf)$.

Proposition 6.3. *L'application ϕ est isomorphisme linéaire de $S'\otimes{}^{t}S'$ dans $\mathrm{C}(Q')$ qui vérifie la propriété d'équivariance. Pour tout g de G (groupe de Clifford réel)*

$$\phi(guf\otimes gvf)=N(g)g\phi(uf\otimes vf)g^{-1}\,. \qquad \square$$

Théorème 6.4. *On a*

$$uf\gamma^{-1}\beta(\bar v)=(\tfrac{1}{2})^{r}\epsilon\sum_{H}\mathscr{H}(e^{H}vf,uf)e_{H}\,,$$

ou encore

$$uf\gamma^{-1}\beta(\bar v)=(\tfrac{1}{2})^{r}\epsilon\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\sum_{H}\mathscr{H}_0(e^{H}vf,uf)e_{H}\,.$$

Démonstration. On a

$$\begin{aligned}uf\beta(\bar v\gamma)&=(\tfrac{1}{2})^{r}\sum_{H}\mathscr{B}(uf,e^{H}\bar v\gamma f,uf)e_{H}\\&=(\tfrac{1}{2})^{r}\sum_{H}\mathscr{B}(uf,\mathscr{C}(e^{H}vf))e_{H}\,,\end{aligned}$$

soit

$$uf\gamma^{-1}\beta(\bar v)=(\tfrac{1}{2})^{r}\epsilon\sum_{H}\mathscr{B}(\mathscr{C}(e^{H}vf),uf)e_{H}\,,$$

d'où le résultat. $\square$

6.1. LES IDENTITES DE FIERZ RELATIVES A $\mathscr{H}_0$

Théorème 6.5. *On a la relation fondamentale*

$$uf\gamma^{-1}\beta(\bar v)u'f\gamma^{-1}\beta(\bar v')=\epsilon\mathscr{H}(vf,u'f)uf\gamma^{-1}\beta(\bar v')\,.$$

Démonstration. On a

$$f\gamma^{-1}\beta(\bar v)u'f=\epsilon\gamma^{-1}\beta(\overline{vf})u'f=\epsilon\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\mathscr{H}_0(vf,u'f)\,.$$

Utilisant alors le fait que $\mathscr{H}=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\mathscr{H}_0$, on obtient le résultat.

On peut alors écrire l'identité fondamentale:

Théorème 6.6.

$$\Big(\sum_H \mathscr{H}_0(e^H vf, uf)e_H\Big)\Big(\sum_K \mathscr{H}_0(e^K v'f, u'f)e_K\Big)$$
$$=2^r\mathscr{H}_0(vf, u'f)\Big(\sum_L \mathscr{H}_0(e^L v'f, uf)e_L\Big).$$

6.2. LES IDENTITES DE FIERZ RELATIVES A $\tilde{\mathscr{H}}_0$

En utilisant $\tilde{\beta}=\beta\circ\alpha$ au lieu de β, on obtient des résultats analogues avec la forme sesquilinéaire hermitienne $\tilde{\mathscr{H}}_0$.

Nous énonçons succinctement les résultats suivants:

Proposition 6.7. *On a*

$$uf\tilde{\beta}(\bar{v}\gamma)=(\tfrac{1}{2})^r\tilde{\varepsilon}\sum_H(-1)^h\tilde{\mathscr{H}}(e^H vf, uf)e_H,$$

soit

$$uf\tilde{\beta}(\bar{v}\gamma)=(\tfrac{1}{2})^r\tilde{\varepsilon}(-1)^k\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta'}\sum_H(-1)^h\tilde{\mathscr{H}}_0(e^H vf, uf)e_H$$

où $e_H=e_{i_1}\cdots e_{i_h}$ *et* $k=\frac{1}{2}|p-q|$.

Démonstration.

$$uf\tilde{\beta}(\bar{v}\gamma)=(\tfrac{1}{2})^r\sum_H(-1)^h\tilde{\mathscr{B}}(uf, e^H\bar{v}\gamma f)e_H,$$

donc

$$uf\tilde{\beta}(\bar{v}\gamma)=(\tfrac{1}{2})^r\tilde{\varepsilon}\sum_H(-1)^h\tilde{\mathscr{B}}(\mathscr{C}(e^H vf), uf)e_H. \qquad\square$$

Théorème 6.8. *On a l'identité fondamentale*

$$uf\tilde{\beta}(\bar{v}\gamma)u'f\tilde{\beta}(\bar{v}'\gamma)=\tilde{\varepsilon}\tilde{\mathscr{H}}(vf, u'f)uf\tilde{\beta}(\bar{v}'\gamma).$$

Démonstration.

$$uf\tilde{\beta}(\bar{v}\gamma)u'f\tilde{\beta}(\bar{v}'\gamma)=\tilde{\mathscr{B}}(u'f, \bar{v}\gamma f)uf\tilde{\beta}(\bar{v}'\gamma)$$
$$=\tilde{\varepsilon}\tilde{\mathscr{B}}(\mathscr{C}(vf), u'f)uf\tilde{\beta}(\bar{v}'\gamma). \qquad\square$$

On peut alors écrire l'identité de Fierz générale:

Théorème 6.9.

$$\left(\sum_H (-1)^h \tilde{\mathscr{H}}_0(e^H vf, uf) e_H\right)\left(\sum_K (-1)^k \tilde{\mathscr{H}}_0(e^K v'f, u'f) e_K\right)$$
$$= 2^r \tilde{\mathscr{H}}_0(vf, u'f)\left(\sum_L (-1)^l \tilde{\mathscr{H}}_0(e^L v'f, uf) e_L\right) ,$$

où $H = i_1 \cdots i_h$ *et* $h = |H|$.

7. Conclusion

Les identités de Fierz sont ainsi démontrées sous leur forme la plus générale en toute dimension paire et signature (p, q) quelconque. En particularisant ces égalités, on retrouve bien sûr les identités classiques de la physique reliant les vecteurs courant et autres.

Remarquons aussi que les formes bilinéaires et hermitiennes utilisées sont les formes classiques construites sur les spineurs et sont invariantes par l'action des groupes de Clifford réels réduits G_0 ou G_0^+. On voit alors aisément que les identités de Fierz se prolongent à des champs de formes au-dessus de variétés munies de structures spinorielles convenables.

8. Exemple et application

8.1. IDENTITE DE FIERZ ET TRANSFORMATION KS

On considère l'espace euclidien $E = \mathbb{R}^3$, muni du repère orthonormé (e_0, e_1, e_2); dans $C(E, Q)$ on a $e_0^2 = e_1^2 = e_2^2 = 1$.

On construit une représentation de $C(3, 0)$ de la manière suivante: On décompose E en $E = \mathbb{R}e_0 \oplus E_1$, $E_1 = (e_0)^\perp$ est muni du repère (e_1, e_2). E_1 est muni de la forme quadratique définie négative Q_1. Dans $C(E_1, Q_1)$ on a $e_1^2 = e_2^2 = -1$. Après complexification, on considère la base de Witt de E_1,

$$\{x = \tfrac{1}{2}(\mathrm{i}e_1 + e_2),\ y = \tfrac{1}{2}(\mathrm{i}e_1 - e_2)\} .$$

On obtient l'espace spinoriel complexe $S = C(Q_1)f$ avec $f = y$, muni du repère spinoriel $\{xf, f\}$.

Il existe un isomorphisme d'algèbre entre $C(Q_1)$ et $C^+(Q)$ tel que

$$e_1 \to e_0 e_1 ,$$
$$e_2 \to e_0 e_2 ,$$
$$e_1 e_2 \to -e_1 e_2 .$$

En considérant l'homomorphisme $h: \mathrm{C}(Q) \to \mathrm{C}^+(Q)$ tel que, si $u = u^+ + u^-$,

$$h(u) = u^+ + u^- z\,, \quad z = \mathrm{i} e_0 e_1 e_2\,,$$

on obtient une représentation $\rho: \mathrm{C}(Q) \to \mathrm{End}\, S$,

$$\rho: \mathrm{C}(Q) \xrightarrow{h} \mathrm{C}^+(Q) \xrightarrow{\sim} \mathrm{C}(Q_1) \xrightarrow{\rho_1} \mathrm{End}\, S\,;$$

dans le repère $\{xf, f\}$, on obtient les identifications

$$\rho(e_0) \equiv -\mathrm{i} e_1 e_2 \equiv \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \equiv \sigma_z\,,$$

$$\rho(e_1) \equiv -\mathrm{i} e_2 \equiv \begin{pmatrix} 0 & -\mathrm{i} \\ \mathrm{i} & 0 \end{pmatrix} \equiv \sigma_y\,,$$

$$\rho(e_2) \equiv -\mathrm{i} e_1 \equiv \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \equiv \sigma_x\,;$$

on reconnaît les matrices de Pauli.

8.2. UNE IDENTITE DE FIERZ DANS $S = \mathrm{C}(Q_1)f$

On définit la forme hermitienne $\tilde{\mathscr{H}}$ par

$$\tilde{\mathscr{H}}(uf, vf)xf = \tilde{\beta}(\overline{uf})vf\,.$$

$\tilde{\mathscr{H}}$ est définie positive et $\tilde{\mathscr{H}}(xf, xf) = 1$, $\tilde{\mathscr{H}}(f, f) = 1$, $\tilde{\mathscr{H}}(xf, f) = 0$.

L'identité de Fierz générale s'écrit

$$\left(\sum_H (-1)^{|H|} \tilde{\mathscr{H}}(e^H vf, uf) e_H\right)\left(\sum_K (-1)^{|K|} \tilde{\mathscr{H}}(e^K v'f, u'f) e_K\right)$$

$$= 2\tilde{\mathscr{H}}(vf, u'f)\left(\sum_L (-1)^{|L|} \tilde{\mathscr{H}}(e^L v'f, uf) e_L\right).$$

En particularisant cette identité aux termes scalaires et en prenant $uf = u'f = vf = v'f$, on obtient

$$-\tilde{\mathscr{H}}(e_1 uf, uf)^2 - \tilde{\mathscr{H}}(e_2 uf, uf)^2 - \tilde{\mathscr{H}}(e_1 e_2 uf, uf)^2 = \tilde{\mathscr{H}}(uf, uf)^2\,.$$

On obtient en utilisant la représentation ρ:

$$\tilde{\mathscr{H}}(\rho(e_0)uf, uf)^2 + \tilde{\mathscr{H}}(\rho(e_1)uf, uf)^2 + \tilde{\mathscr{H}}(\rho(e_2)uf, uf)^2 = \tilde{\mathscr{H}}(uf, uf)^2\,. \quad (1)$$

Nous allons voir que cette relation est exactement la propriété fondamentale de la transformation KS [13,14].

8.3. LA TRANSFORMATION KS: UN PRINCIPE DE TRIALITE ELARGI

On sait définir une application de la manière suivante:

$$S\times S\to E=\mathbb{R}^3,\ (uf, vf)\mapsto X\,,$$

tel que

$$B(X, Y)=\tilde{\mathscr{H}}(\rho(Y)uf, vf) \quad \forall Y\in E\,,$$

où B désigne la forme bilinéaire euclidienne associée à Q. Si on pose $X=x^0e_0+x^1e_1+x^2e_2$, alors on a

$$\begin{aligned} x^0&=\tilde{\mathscr{H}}(\rho(e_0)uf, vf)\,,\\ x^1&=\tilde{\mathscr{H}}(\rho(e_1)uf, vf)\,,\\ x^2&=\tilde{\mathscr{H}}(\rho(e_2)uf, vf)\,. \end{aligned} \tag{2}$$

Si on pose

$$uf=vf=\psi\equiv\begin{pmatrix} a\\ b\end{pmatrix}$$

dans le repère $\{xf, f\}$, avec

$$a=u_1+\mathrm{i}u_2\,,\quad b=u_3+\mathrm{i}u_4\,,\quad u_1 u_2, u_3, u_4\in\mathbb{R}\,,$$

on obtient exactement la transformation KS [4],

$$(\mathrm{KS})\quad \begin{cases} x^0=u_1^2+u_2^2-u_3^2-u_4^2\,,\\ x^1=2(u_1u_4-u_2u_3)\,,\\ x^2=2(u_1u_3+u_2u_4)\,,\end{cases}$$

et l'identité de Fierz (1) donne la relation classique,

$$(x^0)^2+(x^1)^2+(x^2)^2=u_1^2+u_2^2+u_3^2+u_4^2\,.$$

Références

[1] K. Bugajska, Geometrical properties of the algebraic spinors for $\mathrm{R}^{3,1}$, J. Math. Phys. 27 (1986) 143–150.
[2] C. Chevalley, The Algebraic Theory of Spinors (Columbia Univ. Press, 1954).
[3] P.L. Nash, On the exceptional equivalence of complex Dirac spinors and complex space–time vectors, J. Math. Phys. 27 (1986) 1185–1190.
[4] A. Crumeyrolle, Clifford Algebras and Spinor Structures (Reidel, Dordrecht, 1989).
[5] E. Durand, Mécanique quantique, tome 3, Spin et relativité (Masson, 1976).
[6] M. Fierz, Z. Phys. 104 (1937) 553.
[7] J. Keller and S. Rodriguez-Romo, A geometrical interpretation of Fierz identities, J. Math. Phys., à paraître.
[8] F. Reifler, A vector wave equation for neutrinos, J. Math. Phys. 25 (1984) 1088–1092.

[9] F. Reifler and R. Morris, A gauge symmetric approach to Fierz identities, J. Math. Phys. 27 (1986) 2803–2806.
[10] Y. Takahashi, The Fierz identities – A passage between spinors and tensors, J. Math. Phys. 24 (1983) 1783–1790.
[11] L.S. Randriamihamison, Paires de Hurwitz pseudo-euclidiennes en signature quelconque, J. Phys. A 23 (1990) 2729–2749.
[12] J. Keller, Clifford algebras and the electron, dans: Proc. 2nd Workshop on Clifford Algebras and Their Applications in Mathematical Physics (Montpellier, 1989).
[13] P. Kustaanheimo and E. Stiefel, J. reine angew. Math. 218 (1965) 204.
[14] M. Kibler, T. Négali et A. Ronveaux, The KS transformation and certain special functions, dans: Proc. Laguerre Symp. (Bar-le-Duc, 1984), Lecture Notes in Mathematics, Vol. 1171 (Springer, Berlin).
[15] D. Lambert and M. Kibler, An algebraic and geometric approach to non-bijective quadratic transformations, J. Phys. A 21 (1988) 307–343.